Analiza II.2*

Kolokwium, 25 maja 2023

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na oddzielnej kartce. Prosimy o czytelne pisanie rozwiązań – prace nieczytelne nie będą sprawdzane.

Zadanie 1: Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką, zwartą, spójną, orientowalną, bez brzegu powierzchnią (rozmaitością wymiaru 2), $T_S(\varepsilon) := \{(x,y,z) : d((x,y,z),S) \leq \varepsilon\}$ będzie jej ε-otoczeniem. Wykazać, że dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$: $P_S(\varepsilon) := l_3(T_S(\varepsilon))$ jest wielomianem od ε (l_3 jest miarą Lebesgue'a w $\mathbb{R}^3$). Obliczyć współczynnik przy ε^1 w P_S.

Zadanie 2: Obliczyć całkę

$$\int_{\partial K} \frac{((x,y,z),\overline{n})}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \mathrm{d}S,$$

gdzie $K \subset \mathbb{R}^3$ jest zwartym obszarem, którego brzeg ∂K jest gładką powierzchnią, $(0,0,0) \notin \partial K$ a $\mathrm{d}S$ jest miarą powierzchniową na ∂K. Pole wektorów normalnych $\overline{n}$ jest skierowane "na zewnątrz" K.

Wsk: Rozważyć dwa przypadki: $0 \in intK$ *oraz* $0 \notin K$

Zadanie 3: Wśród gładkich krzywych zamkniętych $C \subset \mathbb{R}^2$ (zwarta, spójna, 1-wymiarowa rozmaitość bez brzegu) znaleźć taką dla której wartość całki

$$\int_C (4y^3 - 6xy)\mathrm{d}x + (4x - 3x^3)\mathrm{d}y$$

jest największa. Na C przyjmujemy orientację brzegu zwartego obszaru ograniczonego przez C.

Zadanie 4: Niech $W := \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Czy istnieje 1-forma $\alpha \in \Omega^1(W)$ o zwartym nośniku, zamknięta, niezupełna?

b) Niech $\omega \in \Omega^2(W)$. Wykazać, że istnieje 1-forma α taka, że $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

c) Niech $\omega \in \Omega^2(W)$ będzie 2-formą o zwartym nośniku. Wykazac, że istnieje 1-forma $\alpha \in \Omega^1(W)$ o zwartym nosniku taka, że $\omega = \mathrm{d}\alpha$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\int_W \omega = 0.$$

Zadanie 5: Niech

$$\omega = z\mathrm{d}z \wedge \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

będzie 2-formą na $U = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Pokazać, że nie istnieje 1-forma $\alpha \in \Omega^1(U)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}z \wedge \alpha$ oraz $\mathrm{d}\alpha = 0$.

b) Wykazać, że dla dowolnej $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ takiej, że $\mathrm{d}\omega = 0$, $\mathrm{d}z \wedge \omega = 0$ istnieje 1-forma $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}z \wedge \alpha$ oraz $\mathrm{d}\alpha = 0$.